

Н.Н. Дубенок, В.В. Кузьмичев, А.В. Лебедев

МОДЕЛЬ СМЕШАННЫХ ЭФФЕКТОВ ЗАВИСИМОСТИ ВЫСОТ ОТ ДИАМЕТРОВ ДЕРЕВЬЕВ В СОСНОВЫХ ДРЕВОСТОЯХ

Введение. Основным таксационным показателем древостоя считается запас древесины, который характеризуют с количественной и качественной сторон. Для определения размеров запаса древесины на единице площади лесоводы с давних пор используют вспомогательные таблицы объемов стволов, позволяющие на основе ведомости распределения числа стволов по толщине и средних высот деревьев отдельных ступеней толщины получить размерную структуру изучаемой совокупности. Таким образом, исходными данными для определения запаса служат результаты обмеров диаметров и высот деревьев. Но обмеры диаметров деревьев на высоте груди выполнить намного проще, чем обмеры высот, поэтому ограничиваются замерами высот 15–25 деревьев.

Поскольку эти обмеры повторялись многие годы в огромном количестве, то стали выявляться закономерности связей высот и диаметров деревьев. Было установлено, что зависимость высот от толщины деревьев описывается выпуклой кривой, крутизна которой снижается с увеличением возраста древостоев. По мере уменьшения густоты древостоев она также становится более пологой и меняется соотношение двух частей кривой – до точки перегиба и после нее. В настоящее время выравнивание кривых высот проводят аналитическим путем, и появились обобщения, позволяющие создавать систему кривых высот для совокупности древостоев определенной породы отдельного региона [Sharma et al., 2016; Ferraz Filho et al., 2018; Lebedev, 2020]. Так как таблицы объемов стволов можно аппроксимировать уравнениями, то процесс определения запаса древесины (и его сортиментной структуры с последующей стоимостной оценкой) может полностью выполняться с использованием современной вычислительной техники.

Простые модели «высота – диаметр» выражают высоту как функцию только от диаметра на высоте груди [Лебедев, Кузьмичев, 2020]. Такие модели могут быть получены либо для отдельного древостоя, для каждого из которых они будут иметь индивидуально специфические значения параметров, либо для всей имеющейся совокупности данных по отдельной дре-

весной породе. Изучение простых моделей имеет важное значение для разработки обобщенных моделей, в которые, помимо значений диаметров, включаются такие показатели, как средняя высота и диаметр древостоя, сумма площадей сечений, возраст, число деревьев, класс бонитета и другие. Преимуществом обобщенных моделей считается возможность их применения для прогнозирования значений высот за пределами мест сбора экспериментального материала, в то время как простые модели выражают частную зависимость, которая не может быть распространена для предсказания значений высот деревьев на других участках.

Цель исследования – по материалам измерения модельных деревьев в сосновых древостоях выбрать наиболее адекватную простую модель, которая передает зависимость между высотой деревьев и диаметром на высоте груди.

Объект и методика исследования. Объектом исследования послужили сосновые древостои искусственного происхождения на постоянных пробных площадях в Лесной опытной даче Российского государственного аграрного университета – МСХА имени К.А. Тимирязева. Площадь территории Лесной опытной дачи составляет 248,6 га. С 1869 г. в Лесной опытной даче начались лесокультурные работы, в результате которых к 1902 г. было создано около 60 га культур сосны. В 2009 г. лесные культуры сосны занимали площадь 65 га, а естественные сосняки – 9 га. Средний запас составил 330 м^3 на 1 га [Дубенок, Кузьмичев, Лебедев, 2018; 2020].

В работе используются данные обмеров деревьев на 17 постоянных пробных площадях с 1934 по 2005 гг. Возраст древостоев на момент проведения измерений от 50 до 125 лет. По итогам проведения 77 перемеров массив данных составил 1157 наблюдений. Измерение диаметра проводилось мерной вилкой у растущих деревьев на высоте груди от шейки корня. Высоты измерялись при помощи механического высотомера. Для анализа отобранные данные были случайным образом разделены в соотношении 7 : 3 на обучающую выборку, которая использовалась для подгонки модели, и тестовую, на которой выполнялась проверка обобщающей способности. Описательная статистика экспериментальных данных приведена в табл. 1.

Методика анализа данных предполагала на первом этапе построение парных визуализаций зависимости высоты от диаметра и проверку выборок на наличие выбросов. В дальнейшем проводилось определение параметров для 15 двухпараметрических (M1-M15) и 14 трехпараметрических простых моделей (M16-M29), наиболее часто встречающихся в литературных источниках, общий вид которых приведен в табл. 2.

Таблица 1

Описательная статистика экспериментальных данных

Descriptive statistics of experimental data

Показатель	Обучающая выборка				Тестовая выборка			
	<i>Mean</i>	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>SD</i>	<i>Mean</i>	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>SD</i>
<i>DBH</i>	23,79	7,55	49,30	6,79	23,31	6,20	42,40	6,12
<i>h</i>	21,35	9,00	36,60	3,35	21,31	11,60	32,80	3,37
<i>Dq</i>	22,55	13,40	37,10	4,61	22,58	13,40	37,10	4,64
<i>H</i>	21,12	15,20	28,00	2,58	21,12	15,20	28,00	2,57

Примечание: *Mean* – средняя арифметическая; *Min* – минимальное значение; *Max* – максимальное значение; *SD* – среднеквадратическое отклонение; *DBH* – диаметр на высоте груди, см; *h* – высота, м; *Dq* – среднеквадратический диаметр древостоя, см; *H* – средняя высота древостоя, м.

Сравнение оценок для моделей основывалось на численном и графическом анализе остатков. Для каждого уравнения рассчитывались следующие метрики, позволяющие судить о качестве модели:

– квадратный корень из среднеквадратической ошибки (*RMSE*)

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}},$$

– средний процент абсолютной ошибки (*MAPE*)

$$MAPE = 100 \times \sum \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| / n,$$

– коэффициент детерминации (R^2)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2},$$

– скорректированный коэффициент детерминации ($R^2 - adj$)

$$R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2) \frac{(n-1)}{(n-k)},$$

– информационный критерий Акаике (*AIC*)

$$AIC = 2k + n \ln \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n},$$

– информационный критерий Байеса (*BIC*)

$$BIC = k \ln n + n \ln \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n},$$

где k – количество параметров модели, n – количество наблюдений, y_i – фактическое значение, \hat{y}_i – предсказанное по модели значение.

Модель, для которой получены наибольшие значения коэффициентов детерминации и наименьшие значения информационных критериев, среднеквадратической ошибки и среднего процента абсолютной ошибки признавалась лучшей. Для моделей проводился графический анализ полученных кривых, так как их формы могут значительно отличаться, даже если статистика о качестве моделей аналогична [Neter et al., 1996].

Таблица 2

Модели зависимости высоты деревьев от диаметра на высоте груди

Models of the dependence of tree height on diameter at breast height

ID	Уравнение	Источник
M1	$h = 1,3 + b_1 DBH^{b_2}$	Huxley и Teissier [1936]
M2	$h = 1,3 + \left(\frac{DBH}{b_1 + b_2 DBH} \right)^2$	Näslund [1929]
M3	$h = 1,3 + \frac{b_1 DBH}{b_2 + DBH}$	Huang et al. [2000]
M4	$h = 1,3 + b_1 \left(\frac{DBH}{1 + DBH} \right)^{b_2}$	Huang et al. [2000]
M5	$h = 1,3 + b_1 \left(1 + \frac{1}{DBH} \right)^{b_2}$	Curtis [1967]
M6	$h = 1,3 + \frac{b_1 DBH}{(1 + DBH)^{b_2}}$	Curtis [1967]
M7	$h = 1,3 + b_1 (1 - \exp(-b_2 DBH))$	Meyer [1940]

Продолжение табл. 2

ID	Уравнение	Источник
M8	$h = 1,3 + \exp\left(b_1 + \frac{b_2}{DBH + 1}\right)$	Wykoff et al. [1982]
M9	$h = 1,3 + \frac{b_1 DBH}{(DBH + 1) + b_2 DBH}$	Bates and Watts [1980]
M10	$h = 1,3 + b_1 DBH \exp(-b_2 DBH)$	Huang et al. [2000]
M11	$h = 1,3 + \exp\left(b_1 + \frac{b_2}{DBH}\right)$	Staudhammer and LeMay [2000]
M12	$h = 1,3 + b_1 \exp\left(\frac{b_2}{DBH}\right)$	Buford [1986]
M13	$h = 1,3 + b_1 (\ln(1 + DBH))^{b_2}$	El Momoun et al. [2013]
M14	$h = 1,3 + \left(b_1 + \frac{b_2}{DBH}\right)^{-5}$	El Momoun et al. [2013]
M15	$h = 1,3 + \left(\left(\frac{b_1}{DBH}\right)^{b_2}\right)^{-1}$	Ogana [2018]
M16	$h = 1,3 + \frac{b_1}{1 + b_2 DBH^{-b_3}}$	Huang et al. [2000]
M17	$h = 1,3 + \frac{DBH^2}{b_1 + b_2 DBH + b_3 DBH^2}$	Huang et al. [1992]
M18	$h = 1,3 + \frac{b_1}{1 + b_2 \exp(-b_3 DBH)}$	Huang et al. [1992]
M19	$h = 1,3 + b_1 \left(1 - \exp(-b_2 DBH^{b_3})\right)$	Yang et al. [1978]
M20	$h = 1,3 + b_1 \left(1 - \exp(-b_2 DBH)\right)^{b_3}$	Peng et al. [2001]
M21	$h = 1,3 + b_1 \exp(-b_2 \exp(-b_3 DBH))$	Huang et al. [1992]
M22	$h = 1,3 + \exp(b_1 + b_2 DBH^{b_3})$	Larsen and Hann [1987]
M23	$h = 1,3 + \exp\left(b_1 + \frac{b_2}{DBH + b_3}\right)$	Ratkowsky [1990]

Окончание табл. 2

ID	Уравнение	Источник
M24	$h = 1,3 + b_1 \exp(-b_2 DBH^{-b_3})$	Stage [1963]
M25	$h = \left(1,3^{b_1} + (b_2^{b_1} - 1,3^{b_1}) \frac{1 - \exp(-b_3 DBH)}{1 - \exp(-100b_3)} \right)^{\frac{1}{b_1}}$	Schnute [1981]
M26	$h = 1,3 + b_1 \sqrt{DBH} + b_2 DBH + b_3 DBH^2$	Атрощенко [2004]
M27	$h = 1,3 + \frac{b_1}{1 + (b_2 DBH^{b_3})^{-1}}$	Peschel [1938]
M28	$h = 1,3 + b_1 DBH^{b_2 DBH^{-b_3}}$	Sibbesen [1981]
M29	$h = 1,3 + DBH^{\frac{b_1}{b_2 + b_3 DBH^{b_1}}}$	El Momoun et al. [2013]

Примечание: h – высота, м; DBH – диаметр на высоте груди, см; b – параметры модели.

На заключительном этапе для уравнения, обоснованного в качестве лучшего, производилось оценивание с использованием регрессионной модели смешанных эффектов для устранения случайного влияния отдельных групп наблюдений на фиксированные параметры. Регрессионные модели смешанных эффектов находят широкое применение при изучении связи между высотами и диаметрами деревьев [Лебедев, Кузьмичев, 2021]. Анализ данных проводился с использованием Python 3.5 + NumPy 1.17.1 + SciPy 1.3.2 и R 3.6.3 + lme 4 1.1.

Результаты исследования и их обсуждение. В табл. 3 представлена итоговая сводка оценок пяти лучших двухпараметрических и трехпараметрических моделей. На обучающей выборке лучшее качество из всех по комплексу метрик показывает трехпараметрическая модель M21 ($RMSE = 1,696$; $MAPE = 5,442$; $R^2 = 0,747$; $R^2 - adj = 0,746$; $AIC = 860,5$; $BIC = 874,5$). Но при оценке обобщающей способности на тестовой выборке лучше оказались двухпараметрические модели. По комплексу метрик качества на обучающей и тестовой выборках в качестве лучшей признана двухпараметрическая модель M3: на обучающей выборке $RMSE = 1,699$; $MAPE = 5,449$; $R^2 = 0,746$; $R^2 - adj = 0,745$; $AIC = 861,7$; $BIC = 871,1$ и на тестовой выборке $RMSE = 1,806$; $MAPE = 5,497$; $R^2 = 0,701$; $R^2 - adj = 0,699$; $AIC = 415,6$; $BIC = 423,3$.

Таблица 3

**Итоговая сводка по пяти лучшим двухпараметрическим
и трехпараметрическим моделям**

Summary of the five best two-parameter and three-parameter models

Id	Обучающая выборка					Тестовая выборка						
	RMSE	MAPE	R ²	R ² -adj	AIC	BIC	RMSE	MAPE	R ²	R ² -adj	AIC	BIC
Двухпараметрические модели												
M2	1,712	5,478	0,742	0,741	873,5	882,9	1,819	5,522	0,697	0,695	420,3	428,0
M3	1,699	5,449	0,746	0,745	861,7	871,1	1,806	5,497	0,701	0,699	415,6	423,3
M6	1,712	5,607	0,742	0,741	874,4	883,8	1,808	5,529	0,701	0,699	416,2	423,9
M9	1,699	5,449	0,746	0,745	861,7	871,1	1,806	5,497	0,701	0,699	415,6	423,3
M13	1,702	5,513	0,745	0,744	864,3	873,7	1,803	5,511	0,702	0,701	414,3	422,0
Трехпараметрические модели												
M17	1,698	5,470	0,746	0,745	862,5	876,6	1,804	5,491	0,702	0,699	416,8	428,3
M18	1,697	5,448	0,746	0,745	861,8	875,9	1,819	5,462	0,697	0,694	422,4	433,9
M20	1,698	5,458	0,746	0,745	862,3	876,4	1,807	5,492	0,701	0,699	417,7	429,2
M21	1,696	5,442	0,747	0,746	860,5	874,5	1,812	5,469	0,699	0,697	419,8	431,4
M25	1,698	5,458	0,746	0,745	862,5	876,6	1,807	5,493	0,701	0,699	417,6	429,2

Оценки параметров для пяти лучших двухпараметрических и трехпараметрических моделей представлены в табл. 4. Для всех рассмотренных моделей, за исключением трехпараметрической M17, все оцененные параметры являются статистически значимыми при р-значении < 0,05. В модели M17 для параметра b_1 получено р-значение 0,253.

Таблица 4

**Оценки параметров пяти лучших двухпараметрических
трехпараметрических моделей**

Parameter estimates for the five best two-parameter and three-parameter models

Id	Параметр	Оценка	t-статистика	p-value
Двухпараметрические модели				
M2	b_1	-1,287e+00	-4,427e+01	< 2e-16
	b_2	-1,665e-01	-1,352e+02	< 2e-16
M3	b_1	4,093e+01	4,560e+01	< 2e-16
	b_2	2,383e+01	2,269e+01	< 2e-16
M6	b_1	4,544e+00	2,755e+01	< 2e-16
	b_2	5,215e-01	4,672e+01	< 2e-16
M9	b_1	1,717e+00	4,437e+01	< 2e-16
	b_2	-9,580e-01	-5,182e+02	< 2e-16
M13	b_1	2,908e+00	2,388e+01	< 2e-16
	b_2	1,668e+00	4,681e+01	< 2e-16

Id	Параметр	Оценка	t-статистика	p-value
Трехпараметрические модели				
M17	b_1	-6,634e-01	-1,143e+00	2,533e-01
	b_2	6,426e-01	1,174e+01	< 2e-16
	b_3	2,317e-02	1,862e+01	< 2e-16
M18	b_1	2,747e+01	4,968e+01	< 2e-16
	b_2	2,816e+00	1,769e+01	< 2e-16
	b_3	8,860e-02	1,620e+01	< 2e-16
M20	b_1	3,254e+01	1,526e+01	< 2e-16
	b_2	3,323e-02	4,485e+00	8,348e-06
	b_3	7,705e-01	9,909e+00	< 2e-16
M21	b_1	2,878e+01	3,791e+01	< 2e-16
	b_2	1,583e+00	2,264e+01	< 2e-16
	b_3	6,446e-02	1,290e+01	< 2e-16
M25	b_1	1,375e+00	8,644e+00	< 2e-16
	b_2	3,307e+01	2,116e+01	< 2e-16
	b_3	3,205e-02	4,109e+00	4,383e-05

Графическая визуализация для модели M3 представлена на рис. 1. Кривая зависимости высот от диаметров исходит из точки 1,3 м, имеет горизонтальную асимптоту, поэтому удовлетворяет требованиям, предъявляемым к таким функциям [Подмаско, 1973]. При сопоставлении фактических и предсказанных высот основная часть точек сконцентрирована вдоль диагональной линии (рис. 2).

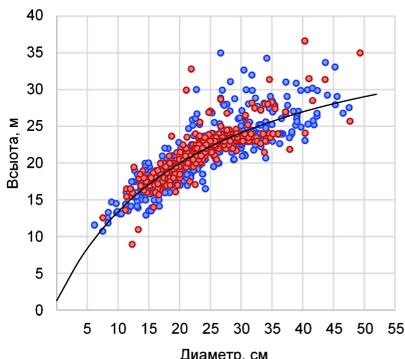


Рис. 1. Зависимость высот от диаметров (синие точки – обучающая выборка, красные точки – тестовая выборка, черная линия – модель)

Fig. 1. Dependence of heights on diameters (blue points – training sample, red points – test sample, black line – model)

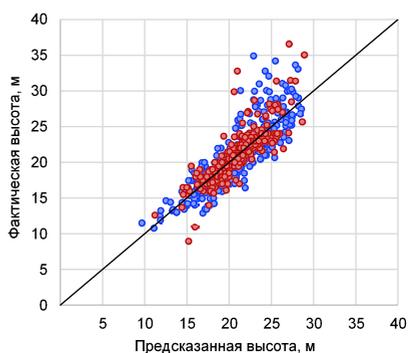


Рис. 2. Фактическая и предсказанная высота для обучающей (синий цвет) и тестовой (красный цвет) выборок

Fig. 2. Actual and predicted heights for training (blue points) and test (red points) samples

Считается, что лучшей прогностической способностью характеризуются модели смешанных эффектов, благодаря чему они нашли широкое применение [Sharma et al., 2016; Ferraz Filho et al., 2018; Лебедев, Кузьмичев, 2021]. Модель смешанных эффектов (МЗМ) после включения в качестве случайного эффекта отдельных перечетов на пробных площадях приняла следующий вид (МЗМ):

$$h_{ij} = 1,3 + \frac{(b_1 + \beta_{1i})DBH_{ij}}{(b_2 + \beta_{2i}) + DBH_{ij}} + \varepsilon_{ij},$$

где h_{ij} – высота для дерева j из выборки i , м; b – параметры модели; β_i – вектор случайных эффектов для отдельного перечета из выборки i , имеющий нормальное распределение с нулевым средним и стандартным отклонением σ_{β_i} ; DBH_{ij} – диаметр на высоте груди для дерева j из выборки i , см; ε_{ij} – вектор остатков, имеющий нормальное распределение с нулевым средним и стандартным отклонением σ .

Все оценки параметров и компоненты дисперсии расширенной модели имеют высокую значимость (р-значение < 2e-16) (табл. 5). И модель фиксированных эффектов, и модель смешанных эффектов адекватно описали зависимость между высотами и диаметрами деревьев в культурах сосны. Но, как и ожидалось, первая модель имеет худшие значения метрик качества по сравнению со второй. Включение случайных эффектов на уровне графика высот для отдельного перечета позволило снизить RMSE на 33%, MAPE на 31%, AIC на 10% и BIC на 10%.

Таблица 5

Итоговые оценки для модели фиксированных и смешанных эффектов
Final estimates for fixed and mixed effects model

Id	Параметр	Оценка	t-статистика	p-value	Критерии качества модели			
					RMSE	MAPE	AIC	BIC
Сосна, лесные культуры								
МЗ	b_1	4,143e+01	5,199e+01	< 2e-16	1,731	5,484	4559,5	4574,7
	b_2	2,431e+01	2,607e+01	< 2e-16				
МЗМ	Фиксированные компоненты				1,167	3,797	4084,4	4114,7
	b_1	3,544e+01	3,460e+01	< 2e-16				
	b_2	1,734e+01	1,462e+01	< 2e-16				
	Случайные компоненты							
	$\sigma_{\beta_{1i}}$	7,198e+00	–	–				
	$\sigma_{\beta_{2i}}$	8,234e+00	–	–				
	$corr(\sigma_{\beta_{1i}}, \sigma_{\beta_{2i}})$	9,490e-01	–	–				
	σ	1,231e+00	–	–				

Графическая визуализация зависимости высот от диаметров по модели МЗМ представлена на рис. 3. Модель смешанных эффектов может достаточно точно предсказывать недостающие измерения высот, но при этом стоит учитывать возможные ошибки. Это связано с наличием экстремальных выбросов (рис. 4), которые могут появляться из-за неоднородности древостоев, в том числе обусловленной действием неблагоприятных факторов окружающей среды. Таким образом, точность прогноза модели смешанного эффекта для каждого отдельного дерева сильно зависит от неоднородности древостоя и количества деревьев выборки с измеренной высотой, которые будут использоваться для прогнозирования случайных эффектов. Измеренные высоты любого количества деревьев можно использовать для прогнозирования случайных эффектов, но точность во многом зависит от репрезентативности высот выбранных деревьев. Как правило, чем больше количество деревьев, выбранных для предсказания случайных эффектов, тем выше будет точность предсказания модели смешанных эффектов [Sharma et al., 2016].

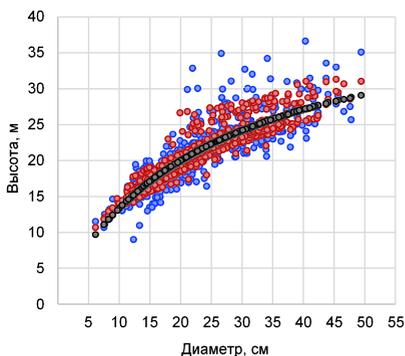


Рис. 3. Зависимость высот от диаметров (синие точки – фактические данные, красные точки – предсказанные значения по модели смешанных эффектов, черные точки – предсказанные значения по модели фиксированных эффектов)

Fig. 3. Dependence of heights on diameters (blue points – actual data, red points – predicted values according to the mixed effects model, black points – predicted values according to the fixed effects model)

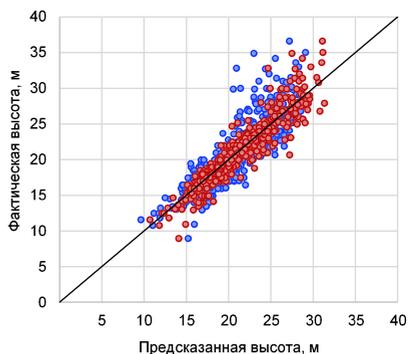


Рис. 4. Фактическая и предсказанная высота для модели фиксированных эффектов (синий цвет) и смешанных эффектов (красный цвет)

Fig. 4. Actual and predicted height for fixed effects model (blue points) and mixed effects (red points)

Заключение. Модель со смешанными эффектами более точно предсказывает значения высот по сравнению с моделью фиксированных эффектов. Недостающие значения высот большого количества деревьев на участке можно вычислить более точно с помощью модели смешанных эффектов, а не с применением модели фиксированных эффектов или только фиксированной части (средний отклик) модели смешанных эффектов. Применение разработанной модели должно ограничиваться только в тех условиях, к которым относятся экспериментальные материалы.

Библиографический список

Апрощенко О.А. Моделирование роста леса и лесохозяйственных процессов. Минск: БГТУ, 2004. 249 с.

Дубенок Н.Н., Кузьмичев В.В., Лебедев А.В. Динамика лесного фонда Лесной опытной дачи РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева за 150 лет // Известия Тимирязевской сельскохозяйственной академии. 2018. № 4. С. 5–19. DOI: 10.26897/0021-342X-2018-4-5-19.

Дубенок Н.Н., Кузьмичев В.В., Лебедев А.В. Результаты экспериментальных работ за 150 лет в Лесной опытной дачи Тимирязевской академии. РГАУ-МСХА им. К.А. Тимирязева. М.: Наука, 2020. 382 с.

Лебедев А.В., Кузьмичев В.В. Верификация трехпараметрических моделей зависимости высоты от диаметра на высоте груди для березовых древостоев Европейской части России // Сибирский лесной журнал. 2020. № 5. С. 45–54. DOI 10.15372/SJFS20200505.

Лебедев А.В., Кузьмичев В.В. Регрессионные модели смешанных эффектов в лесохозяйственных исследованиях // Сибирский лесной журнал. 2021. № 1. С. 13–20. DOI 10.15372/SJFS20210102.

Подмаско Б.И. Инвентаризация лиственничных лесов севера Дальнего Востока СССР методом камерального дешифрирования аэроснимков: автореф. дис. ... канд. с.-х. наук. М., 1973. 24 с.

Bates D.M., Watts D.G. Relative curvature measures of nonlinearity // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1980. No. 42 (1). P. 1–25.

Buford M.A. Height-diameter relationship at age 15 in loblolly pine seed sources // Forest Science. 1986. No. 32 (3). P. 812–818.

Curtis R.O. Height-diameter and height – diameter-age equations for second growth Douglas-fir // Forest Science. 1967. No 13. P. 365–375.

El Mamoun H.O., El Zein A.I., El Mugira M.I. Modelling Height-Diameter Relationships of Selected Economically Important Natural Forests Species // Journal of Forest Products & Industries. 2013. No. 2(1). P. 34–42.

Ferraz Filho A.C., Mola-Yudego B., Ribeiro A., Scolforo J.R.S., Loos R.A., Scolforo H.F. Height-diameter models for *Eucalyptus* sp. plantations in Brazil // Cerne. 2018. Vol. 24, no. 1. P. 9–17. DOI: 10.1590/01047760201824012466.

Huang S., Price D., Titus S.J. Development of ecoregion-based height-diameter models for white spruce in boreal forests // *Forest Ecology and Management*. 2000. No. 129(1). P. 125–141.

Huang S., Titus S.J., Wiens D.P. Comparison of nonlinear height-diameter functions for major Alberta tree species // *Canadian Journal of Forest Research*. 1992. No. 22 (9). P. 1297–1304.

Huxley J., Teissier G. Terminology of relative growth rates // *Nature*. 1936. No. 137. P. 780–781.

Larsen D.R., Hann D.W. Height-diameter Equations for Seventeen Tree Species in Southwest Oregon. Corvallis: Forest Research Laboratory, Oregon State University, Corvallis, 1987.

Lebedev A.V. New generalised height-diameter models for the birch stands in European Russia // *Baltic Forestry*. 2020. Vol. 26, no. 2. P. 1–7. DOI 10.46490/BF499.

Meyer H.A. A mathematical expression for height curves // *Journal of Forestry*. 1940. No. 38. P. 415–420.

Näslund M. Antalet provträd och höjdkurvans noggrannhet // *Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut*. 1929. No. 25. P. 93–170.

Neter J., Kutner M.H., Nachtsheim C.J., Wasserman W. *Applied Linear Statistical Models*. Chicago: Irwin, 1996. 1408 p.

Ogana F.N. Comparison of a modified log-logistic distribution with established models for tree height prediction // *Journal of Research in Forestry, Wildlife & Environment*. 2018. No. 10 (2). P. 49–55.

Peng C., Zhang L., Liu J. Developing and validating nonlinear height–diameter models for major tree species of Ontario’s boreal forests // *Northern Journal of Applied Forestry*. 2001. No. 18 (3). P. 87–94.

Peschel W. Mathematical methods for growth studies of trees and forest stands and the results of their application // *Tharandter Forstl. Jahrb.* 1938. No. 89. P. 169–247.

Ratkowsky D.A. *Handbook of nonlinear regression*. New-York: Marcel and Dekker, 1990. 241 p.

Schnute J. A versatile growth model with statistically stable parameters // *Canadian Journal of Forest Research*. 1981. No. 38. P. 1128–1140.

Sharma R.P., Vacek Z., Vacek S. Nonlinear mixed effect height-diameter model for mixed species forests in the central part of the Czech Republic // *Journal of Forest Science*. 2016. No. 62 (10). P. 470–484. DOI: 10.17221/41/2016-JFS.

Sibbesen E. Some new equations to describe phosphate sorption by soils // *J. Soil Sci.* 1981. No. 32 (1). P. 67–74.

Stage A.R. A mathematical approach to polymorphic site index curves for grand fir // *Forest Science*. 1963. No. 9. P. 167–180.

Staudhammer C., LeMay V. Height prediction equations using diameter and stand density measures // *The Forestry Chronicle*. 2000. No. 76 (2). P. 303–309.

Wykoff W.R., Crookston N.L., Stage A.R. *User’s Guide to the Stand Prognosis Model*. General Technical Report INT-133. Ogden: USDA Forest Service, Intermountain Forest and Range Experiment Station, 1982. 231 p.

Yang R.C., Kozak A., Smith J.H.G. The potential of Weibull-type functions as flexible growth curves // *Canadian Journal of Forest Research*. 1978. No. 8 (4). P. 424–431.

References

- Atroshchenko O.A.* Modelirovanie rosta lesa i lesokhozyaystvennykh protsessov (Modeling Forest growth and forestry processes). Minsk: BGTU (Belarus. St. Technol. Univ.), 2004. 249 p. (In Russ.)
- Bates D.M., Watts D.G.* Relative curvature measures of nonlinearity. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 1980, no. 42 (1), pp. 1–25.
- Buford M.A.* Height-diameter relationship at age 15 in loblolly pine seed sources. *Forest Science*, 1986, no. 32 (3), pp. 812–818.
- Curtis R.O.* Height-diameter and height-diameter-age equations for second growth Douglas-fir. *Forest Science*, 1967, no. 13, pp. 365–375.
- Dubenok N.N., Kuzmichev V.V., Lebedev A.V.* Forest area dynamics of the Forest experimental district of Russian Timiryazev State Agrarian University over a period of 150 years. *Izvestiya of Timiryazev Agricultural Academy*, 2018, no. 4, pp. 5–19. DOI: 10.26897/0021-342X-2018-4-5-19. (In Russ.)
- Dubenok N.N., Kuzmichev V.V., Lebedev A.V.* The results of experimental work over 150 years in the Forest experimental district of the Timiryazev Academy; RSAU-MTAA. M.: Nauka, 2020. 382 p. (In Russ.)
- El Mamoun H.O., El Zein A.I., El Mugira M.I.* Modelling Height-Diameter Relationships of Selected Economically Important Natural Forests Species. *Journal of Forest Products & Industries*, 2013, no. 2(1), pp. 34–42.
- Ferraz Filho A.C., Mola-Yudego B., Ribeiro A., Scolforo J.R.S., Loos R.A., Scolforo H.F.* Height-diameter models for *Eucalyptus* sp. plantations in Brazil. *Cerne*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 9–17. DOI: 10.1590/01047760201824012466.
- Huang S., Price D., Titus S.J.* Development of ecoregion-based height-diameter models for white spruce in boreal forests. *Forest Ecology and Management*, 2000, no. 129(1), pp. 125–141.
- Huang S., Titus S.J., Wiens D.P.* Comparison of nonlinear height-diameter functions for major Alberta tree species. *Canadian Journal of Forest Research*, 1992, no. 22 (9), pp. 1297–1304.
- Huxley J., Teissier G.* Terminology of relative growth rates. *Nature*, 1936, no. 137, pp. 780–781.
- Larsen D.R., Hann D.W.* Height-diameter Equations for Seventeen Tree Species in Southwest Oregon. Corvallis: Forest Research Laboratory, Oregon State University, Corvallis, 1987.
- Lebedev A.V., Kuzmichev V.V.* Verification of three-parameter models of dependence of height on the diameter at breast height for birch stands of the European part of Russia. *Sibirskij Lesnoj Zurnal (Sib. J. For. Sci.)*, 2020, no. 5, pp. 45–54. (In Russ.)
- Lebedev A.V.* New generalised height-diameter models for the birch stands in European Russia. *Baltic Forestry*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 1–7. DOI 10.46490/BF499. (In Russ.)
- Lebedev A.V., Kuzmichev V.V.* Mixed effects regression models in forestry research. *Sibirskij Lesnoj Zurnal (Sib. J. For. Sci.)*, 2021, no. 1, pp. 13–20. (In Russ.)
- Meyer H.A.* A mathematical expression for height curves. *Journal of Forestry*, 1940, no. 38, pp. 415–420.

Näslund M. Antalet provträd och höjdkurvans noggrannhet // Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut. 1929 – № 25. – S. 93–170.

Neter J., Kutner M.H., Nachtsheim C.J., Wasserman W. Applied Linear Statistical Models. Chicago: Irwin, 1996. 1408 p.

Ogana F.N. Comparison of a modified log-logistic distribution with established models for tree height prediction. *Journal of Research in Forestry, Wildlife & Environment*, 2018, no. 10 (2), pp. 49–55.

Peng C., Zhang L., Liu J. Developing and validating nonlinear height–diameter models for major tree species of Ontario’s boreal forests. *Northern Journal of Applied Forestry*, 2001, no.18 (3), pp. 87–94.

Peschel W. Mathematical methods for growth studies of trees and forest stands and the results of their application. *Tharandter Forstl. Jahrb*, 1938, no. 89, pp. 169–247.

Podmasko B.I. Inventory of larch forests of the north of the Far East of the USSR by the method of desk interpretation of aerial photographs: Abstract of dissertation PhD (Agriculture). Moscow, 1973. 24 p.

Ratkowsky D.A. Handbook of nonlinear regression. New-York: Marcel and Dekker, 1990. 241 p.

Schnute J. A versatile growth model with statistically stable parameters. *Canadian Journal of Forest Research*, 1981, no. 38, pp. 1128–1140.

Sharma R.P., Vacek Z., Vacek S. Nonlinear mixed effect height-diameter model for mixed species forests in the central part of the Czech Republic. *Journal of Forest Science*, 2016, no. 62 (10), pp. 470–484. DOI: 10.17221/41/2016-JFS.

Sibbesen E. Some new equations to describe phosphate sorption by soils. *J. Soil Sci*, 1981, no. 32 (1), pp. 67–74.

Stage A.R. A mathematical approach to polymorphic site index curves for grand fir. *Forest Science*, 1963, no. 9, pp. 167–180.

Staudhammer C., LeMay V. Height prediction equations using diameter and stand density measures. *The Forestry Chronicle*, 2000, no. 76 (2), pp. 303–309.

Wykoff W.R., Crookston N.L., Stage A.R. User’s Guide to the Stand Prognosis Model. General Technical Report INT-133. Ogden: USDA Forest Service, Intermountain Forest and Range Experiment Station, 1982. 231 p.

Yang R.C., Kozak A., Smith J.H.G. The potential of Weibull-type functions as flexible growth curves. *Canadian Journal of Forest Research*, 1978, no. 8 (4), pp. 424–431.

Материал поступил в редакцию 01.07.2021

Дубенок Н.Н., Кузьмичев В.В., Лебедев А.В. Модель смешанных эффектов зависимости высот от диаметров деревьев в сосновых древостоях // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2021. Вып. 237. С. 59–74. DOI: 10.21266/2079-4304.2021.237.59-74

Основными исходными данными для определения запаса служат результаты обмеров диаметров и высот деревьев. Но обмеры диаметров деревьев на высоте груди выполнить намного проще, чем обмеры высот,

поэтому ограничиваются замерами высот 15–25 деревьев. Цель исследования – по материалам измерения модельных деревьев в сосновых древостоях выбрать наиболее адекватную простую модель, которая передает зависимость между высотой деревьев и диаметром на высоте груди. Объектом исследования послужили сосновые древостои искусственного происхождения на постоянных пробных площадях в Лесной опытной даче Российского государственного аграрного университета – МСХА имени К.А. Тимирязева. В работе используются данные обмеров деревьев на 17 постоянных пробных площадях с 1934 по 2005 г. Возраст древостоев на момент проведения измерений от 50 до 125 лет. По итогам проведения 77 перечетов массив данных составил 1157 наблюдений. И модель фиксированных эффектов, и модель смешанных эффектов адекватно описали зависимость между высотами и диаметрами деревьев в культурах сосны. Но, как и ожидалось, первая модель имеет худшие значения метрик качества по сравнению со второй. Модель со смешанными эффектами более точно предсказывает значения высот по сравнению с моделью фиксированных эффектов. Недостающие значения высот большого количества деревьев на участке можно вычислить более точно с помощью модели смешанных эффектов, а не применения модели фиксированных эффектов или использования только фиксированной части (средний отклик) модели смешанных эффектов. Применение разработанной модели должно ограничиваться только в тех условиях, к которым относятся экспериментальные материалы.

Ключевые слова: высота, диаметр на высоте груди, сосновый древостой, модель смешанных эффектов.

Dubenok N.N., Kuzmichev V.V., Lebedev A.V. Model of mixed effects of height dependence on tree diameters in pine stands. *Izvestia Sankt-Peterburgskoj Lesotehniceskoy Akademii*, 2021, iss. 237, pp. 59–74 (in Russian with English summary). DOI: 10.21266/2079-4304.2021.237.59-74

The main data for the stock of research results is the diameter of measurements and heights of trees. But measurements of the diameter at breast height are much easier to perform than measurements of heights, therefore, they are limited to measuring the heights of 15–25 trees. The aim of the study is to select the most adequate simple model based on the measurements of model trees in pine antiquities, which conveys the relationship between the height of trees and the diameter at breast height. The object of the study was pine stands of artificial origin on permanent test plots in the Forest Experimental Station Russian State Agrarian University – Moscow Timiriazev Agricultural Academy. The work uses data from tree measurements on 17 permanent sample plots from 1934 to 2005. The age of the stands at the time of measurements was from 50 to 125 years. As a result of 77 enumerations, the data array amounted to 1157 observations. Both the fixed effects model and the mixed effects model adequately describe the relationship between heights and diameters of trees in pine stumps. But, as expected, the first model has worse quality metrics than the second. The mixed effects model more accurately predicts heights from the fixed

effects model. The missing heights of a large number of trees on a site can be calculated accurately using mixed effects models, rather than using fixed effects models or using only a fixed portion (mean response) of the mixed effects model. The application of the developed model should be limited only in those conditions to which the experimental materials are applied.

Key words: height, diameter at breast height, pine forest stand, mixed effect model.

ДУБЕНОК Николай Николаевич – заведующий кафедрой сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства Российского государственного аграрного университета – МСХА имени К.А. Тимирязева, академик РАН, доктор сельскохозяйственных наук, профессор.

127550, Тимирязевская ул., д. 49, г. Москва, Россия.

DUBENOK Nikolay N. – DSc (Agriculture), professor, academician of RAS, head of the department of Agricultural Reclamation, Forestry and Land Management at Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy.

127550. Timiryazevskaya str. 49. Moscow. Russia.

КУЗЬМИЧЕВ Валерий Васильевич – заведующий лабораторией кафедры сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства Российского государственного аграрного университета – МСХА имени К.А. Тимирязева, доктор биологических наук, профессор.

127550, Тимирязевская ул., д. 49, г. Москва, Россия.

KUZMICHEV Valery V. – DSc (Biology), professor, head of laboratory of the department of Agricultural Reclamation, Forestry and Land Management at Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy.

127550. Timiryazevskaya str. 49. Moscow. Russia.

ЛЕБЕДЕВ Александр Вячеславович – доцент кафедры сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства Российского государственного аграрного университета – МСХА имени К.А. Тимирязева, кандидат сельскохозяйственных наук. SPIN-код: 5789-5540. ORCID: 0000-0002-8939-942X.

127550, Тимирязевская ул., д. 49, г. Москва, Россия. E-mail: avl1993@mail.ru

LEBEDEV Aleksandr V. – PhD (Agriculture), lecturer of the department of Agricultural Reclamation, Forestry and Land Management at Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy. SPIN-code: 5789-5540. ORCID: 0000-0002-8939-942X.

127550. Timiryazevskaya str. 49. Moscow. Russia. E-mail: avl1993@mail.ru